ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE
"P. Hensemberger"
Via Giovanni Berchet, 2 - 20900 Monza (MB)
Cod. Fisc.85018150152 ☎ 039 324607

ISTITUTO TECNICO:
Informatica e Telecomunicazioni - Meccanica e Meccatronica
Elettrotecnica ed Elettronica – Biotecnologie Sanitarie

LICEO SCIENTIFICO:
Scienze Applicate

PEO:mbtf410002@istruzione.it - PEC:mbtf410002@pec.istruzione.it - https://www.hensemberger.edu.it

MATEMATICA

CHI BEN COMINCIA ...

È A METÀ DELL'OPERA!

INSIEMI NUMERICI

Ogni insieme numerico, in matematica, è stato introdotto, non per capriccio, ma per una reale esigenza di risolvere problemi concreti. Infatti, l'insieme dei numeri naturali, ebbe origine nell'antichità quando nelle prime forme di società organizzate nasceva l'esigenza di contare (i capi di bestiame, le ore lavorative, il numero di elementi di un raccolto ecc.....)
Inizialmente, come riportano alcuni studiosi dell'antichità, il numero naturale venne concepito come caratteristica propria e inseparabile di un insieme di oggetti: venivano usati certi numeri per contare uomini, altri per contare animali ecc......
Solo successivamente nacque il concetto astratto di numero naturale come proprietà comune a tutti gli insiemi.
Le operazioni nacquero anch'esse dapprima come operazioni su oggetti concreti; solo più tardi l'uomo giunse a comprendere che 7+4 produce sempre 11,come risultato, sia che si sommino pecore, cavalli, lance o qualsiasi altro oggetto. Si è così costruita "l'aritmetica dei numeri naturali".
Un altro problema pratico da risolvere, sorto sempre in società organizzate, fu quello di delimitare appezzamenti di terra ovvero di misurare le superfici.
La misurazione pose quindi il problema di frazionare le grandezze, di lavorare con grandezze minori dell'unità, di creare strumenti matematici più "potenti" dei numeri naturali.
Sorse quindi "l'aritmetica dei numeri frazionari".

I numeri **0 1 2 3 4 5 ……………………………………** costituiscono l'insieme dei

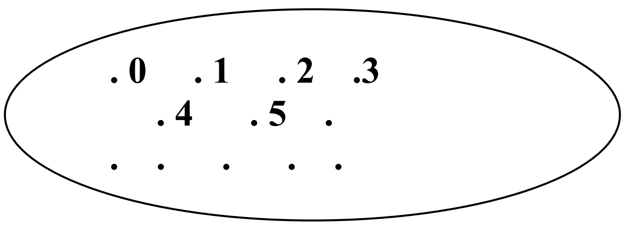
numeri naturali N

Tale insieme si può rappresentare nei seguenti modi:

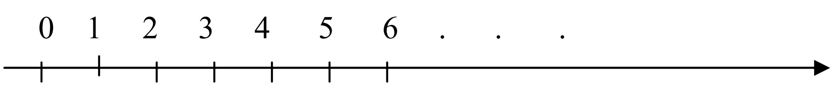
a) elencandone gli elementi

$$\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \}$$

b) graficamente con un diagramma di Venn



c) associandoli a punti di una semiretta



OPERAZIONI IN N

ADDIZIONE

$$4 + 3 = 7$$

addendi **somma**

PROPRIETA'	ESEMPI
➢ *Commutativa*	**7 + 3 = 3 + 7 a + b = b + a**
➢ *Associativa*	**4 + 6 + 12 = (4 + 6) + 12 a + b + c = (a + b) + c**
➢ *Dissociativa*	**12 + 13 = 10 + 2 + 10 + 3 (a + b) + c = a + b + c**
➢ *Elemento neutro:* 0	**5 + 0 = 5 0 + 13 = 13 a + 0 = a**

SOTTRAZIONE

$$7 - 2 = 5$$

minuendo **differenza**

sottraendo

Nota bene: non sempre è possibile eseguire la sottrazione tra numeri naturali!
5 – 7 = ? non esiste alcun numero <u>naturale</u> che addizionato a 7 dà 5 !

PROPRIETA'	ESEMPI
➢ *Invariantiva*	**18 – 6 = (18 + 2) – (6 + 2) a – b = (a + c) – (b + c)**

Esercizi

1) Scambiando nel numero 475 la cifra delle unità con quella delle decine, il numero così ottenuto di quanto aumenta o diminuisce?

2) Calcolare le seguenti espressioni:

a) $200 - \{82 - [70 - (165 - 150)] + (307 - 68 + 48 - 215 + 13)\} - [230 - 158 - (136 - 97)]$

b) $\{184 + [175 - (299 - 198) + (764 - 626)] - 196\} - [(683 - 657) + (340 - 168 - 82)]$

3)Tradurre in espressione matematica la seguente frase, e calcolarne il valore:

Sottrarre dalla somma di 37 e 28, la differenza tra 128 e 79.

MOLTIPLICAZIONE

$$5 \cdot 3 = 15$$

fattori **prodotto**

Definizione di PRODOTTO

Si dice prodotto di due numeri naturali la somma di tanti addendi uguali al primo fattore, quante sono le unità del secondo.

$$4 \cdot 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$$

PROPRIETA'	ESEMPI
➢ *Legge di annullamento del prodotto:* se in una moltiplicazione un fattore è zero, anche il prodotto è zero; viceversa, se un prodotto è zero, uno almeno dei fattori della moltiplicazione è zero	$7 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 12 = 0$ $a \cdot 0 = a$ se $a \cdot b = 0$ deve essere $a = 0$ oppure $b = 0$
➢ *Commutativa*	$15 \cdot 37 = 37 \cdot 15$ $a \cdot b = b \cdot a$
➢ *Associativa*	$21 \cdot 54 \cdot 36 = 21 \cdot (54 \cdot 36)$ $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
➢ *Dissociativa*	$(34 \cdot 15) \cdot 5 = 34 \cdot 15 \cdot 5$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
➢ *Distributiva rispetto all'addizione*	$(12 + 64 + 3) \cdot 5 = 12 \cdot 5 + 64 \cdot 5 + 3 \cdot 5$ $(a + b + c) \cdot d = a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d$
➢ *Distributiva rispetto alla sottrazione*	$(38 - 14) \cdot 2 = 38 \cdot 2 - 14 \cdot 2$ $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
Elemento neutro: **1**	$87 \cdot 1 = 87$ $a \cdot 1 = a$

POTENZA

base **esponente**

$$5^3$$

Definizione di POTENZA

La potenza di un numero con esponente maggiore di 1 è il prodotto di tanti fattori uguali alla base, quante sono le unità dell'esponente

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

PROPRIETA'	ESEMPI
➢ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^7$
➢ $a^m : a^n = a^{m-n}$	$7^6 : 7^4 = 7^2$
➢ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$5^3 \cdot 8^3 = (5 \cdot 8)^3$
➢ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \cdot 9)^5 = 4^5 \cdot 9^5$
➢ $a^n : b^n = (a : b)^n$	$6^8 : 3^8 = (6 : 3)^8$
➢ $(a : b)^n = a^n : b^n$	$(15 : 5)^2 = 15^2 : 5^2$

➢ $a^1 = a$	➢ $a^0 = 1$ $a \neq 0$	➢ 0^0 indeterminata	$9^1 = 9$	$12^0 = 1$	0^0 indeterminata

DIVISIONE

12 : 3 = 4 ← **quoziente**

dividendo **divisore**

Definizione di QUOZIENTE

Si dice quoziente tra due numeri naturali quel numero che moltiplicato per il divisore dà il dividendo.

Nota bene: non sempre è possibile eseguire la divisione tra numeri naturali!
8 : 3 = ? non esiste alcun numero <u>naturale</u> che moltiplicato per 3 dà 8 !

PROPRIETA’	ESEMPI
➢ *Invariantiva*	$225 : 25 = (225 : 5) : (25 : 5) = (225 \cdot 4) : (25 \cdot 4)$ $a : b = (a : c) : (b : c) = (a \cdot c) : (b \cdot c)$
➢ *Distributiva*	**(175 + 50 – 35) : 5 = 175 : 5 + 50 : 25 – 35 : 5** **(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d**
RUOLO DELLO ZERO NELLA DIVISIONE	
0 : 3 = 0 perché quel numero che moltiplicato per il divisore 3 dà il dividendo 0 è il numero 0 **0 · 3 = 0**	
5 : 0 non ha significato perché non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dà come risultato 5 (legge di annullamento del prodotto)	
0 : 0 = 5 perché 5 • 0 = 0 **0 : 0 = 7** perché 7 • 0 = 0 **0 : 0 = 1** perché 1 • 0 = 0 **0 : 0 = 12** perché 12 • 0 = 0 **………..** **…………**	⇒ **0 : 0 indeterminata**

Nota bene:

- **1** <u>è divisore di ogni numero</u>
- **0** <u>non è divisore di alcun numero</u>
- Ogni numero diverso da zero è divisore di se stesso

Definizione di NUMERO PRIMO

Un numero naturale si dice primo se è divisibile per 1 e per se stesso.

Es. 13 è numero primo infatti 13 : 1 = 13 e 13 : 13 = 1 ovvero 13 = 13 ·1

Come si individuano i divisori di un numero?

Esistono delle semplici regole , dette **CRITERI DI DIVISIBILITA’**

Un numero è divisibile per:

- **2** se termina con una cifra pari (ovvero divisibile per 2)
- **3** se la somma delle sue cifre è divisibile per 3
- **5** se la sua ultima cifra a destra è 5 o 0, cioè se termina con 0 o 5
- **10** , **100, 1000,…**se termina rispettivamente con 1, 2, 3,…zeri
- **11** se la somma delle sue cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari hanno per differenza un numero multiplo di 11 (0, 11, 22, 33,…..)

Esercizi

1) Applicando i relativi criteri di divisibilità, indicare quali dei seguenti numeri sono divisibili per:

	2	***3***	***4***	***5***	***9***	***11***	***25***
445	□	□	□	□	□	□	□
360	□	□	□	□	□	□	□
1212	□	□	□	□	□	□	□
1309	□	□	□	□	□	□	□
6721	□	□	□	□	□	□	□
6600	□	□	□	□	□	□	□

	2	***3***	***4***	***5***	***9***	***11***	***25***
6600	□	□	□	□	□	□	□
18.810	□	□	□	□	□	□	□
83.600	□	□	□	□	□	□	□
92.123	□	□	□	□	□	□	□
19.840	□	□	□	□	□	□	□
96.030	□	□	□	□	□	□	□

SCOMPOSIZIONE DI UN NUMERO IN FATTORI

Cosa significa scomporre un numero in fattori?

Scomporre un numero in fattori significa scrivere lo stesso numero sotto un'altra forma ovvero sotto forma di moltiplicazione di più fattori.

Es. *Scomporre in fattori il numero 18*
18 = 3 • 6 •1 oppure 18 = 2 • 9 • 1

Scomporre in fattori il numero 20
20 = 2 • 10 • 1 oppure 20 = 4 • 5 • 1

SCOMPOSIZIONE DI UN NUMERO IN FATTORI PRIMI

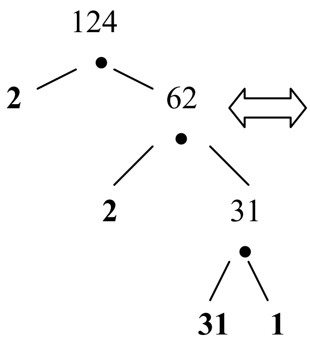
Scomporre un numero in fattori primi significa scrivere il numero stesso sotto forma di moltiplicazione di fattori primi.

Es. *Scomporre in fattori primi il numero 18* *Scomporre in fattori primi il numero 20*

$18 = 2 \cdot 3^2 \cdot 1$ $20 = 2^2 \cdot 5 \cdot 1$

PROCEDIMENTO PER SCOMPORRE UN NUMERO IN FATTORI PRIMI

Es. *Scomporre in fattori primi il numero 124*



$\Longleftrightarrow$

Si ricerca il più piccolo divisore primo di 124 che è 2 e si esegue la divisione 124 : 2 = 62; si ricerca il più piccolo divisore primo di 62 che è 2 e si esegue la divisione 62 : 2 = 31; il numero 31 è numero primo quindi è divisibile per se stesso e per 1.

$\Longleftrightarrow$

124	2
62	2
31	31
1	1

La scomposizione del numero 124 in fattori primi è: $\mathbf{124 = 2^2 \cdot 31 \cdot 1}$

Esercizi

Scomporre in fattori primi i seguenti numeri:

12;	**36;**	**900;**	**1000;**
49;	**48;**	**432;**	**3006;**
64;	**99;**	**896;**	**2260;**

MASSIMO COMUNE DIVISORE E MINIMO COMUNE MULTIPLO

Definizione di M.C.D.

Si dice *massimo comun divisore* di due o più numeri naturali il maggiore dei loro divisori comuni.

Es. *Il M.C.D. tra 18 e 24*

Divisori di 18 = {1, 2, 3, 6, 9, 18}
Divisori di 24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} $\Longrightarrow$ Divisori comuni = {1, 2, 3, 6 }

$\Downarrow$

M.C.D. (18, 24) = 6

PROCEDIMENTO PER LA DETERMINAZIONE DEL M.C.D.
tra due o più numeri

Es. *Calcolare il M.C.D. tra i numeri: 450, 660, 720*

1) Scomporre i numeri in fattori primi:

$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 1$ $\quad$ $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 1$ $\quad$ $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$

2) Moltiplicare fra loro i fattori primi comuni, ciascuno preso una sola volta con il minimo esponente con cui figura nelle scomposizioni:

M.C.D. (450, 660, 720) = $2 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 1 = 30$

Definizione di m. c. m.
Si dice *minimo comune multiplo* di due o più numeri naturali il minore dei loro multipli comuni.

Es. *Il m.c.m. tra 6, 8, 12*

Multipli di 6 = {6, 12, 18, 24, 30, 36,…} ⟹ Multipli comuni = {24, 48, 72,…..}
Multipli di 8 = {8, 16, 24, 32, 40, 48,… }
Multipli di 12= {12, 24, 36, 48, 60, 72,…}

⇓

m.c.m. (6,8,12) = 24

PROCEDIMENTO PER LA DETERMINAZIONE DEL m.c.m.
tra due o più numeri

Es. *Calcolare il m.c.m. tra i numeri 110, 225, 840*

3) Scomporre i numeri in fattori primi:

$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 1$ $\quad$ $225 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 1$ $\quad$ $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1$

4) Moltiplicare fra loro i fattori primi comuni e non comuni, ciascuno preso una sola volta con il massimo esponente con cui figura nelle scomposizioni:

m.c.m. (110, 225, 840) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 =$ 138.600

Definizione di NUMERI PRIMI TRA LORO
Due o più numeri si dicono primi fra loro se hanno per M.C.D. il numero 1.

Esercizi

1) Indicate se ciascuna delle seguenti uguaglianze è vera o falsa, e giustificarne la risposta:
a) M.C.D.(24, 80) = M.C.D.(16, 8) = M.C.D.(104, 64)
b) M.C.D.(9, 15) = M.C.D.(20, 30) = M.C.D.(15, 30)

2) Nelle seguenti uguaglianze sostituire al posto dei puntini un numero in modo che l'uguaglianza risulti verificata:

M.C.D.(8, …..) = 2;	M.C.D.(15, …..) = 5;	M.C.D.(16, …..) = 8
M.C.D.(4, …..) = 4;	M.C.D.(10, …..) = 5;	M.C.D.(24, …..) = 8

3) Indicare se è vero o falso che i numeri dei seguenti gruppi sono primi tra loro:

a) 13, 15
b) 14, 21
c) 12, 14, 63
f) 11, 22, 33
g) 15, 20, 33
h) 25, 49

4) Calcolare mentalmente il M.C.D. dei seguenti gruppi di numeri:

a) 12, 15
b) 20, 70
d) 15, 21
e) 18, 24
g) 55, 77, 121
h) 16, 24, 40

5) Calcolare, mediante la scomposizione in fattori primi, il M.C.D. dei seguenti gruppi di numeri:

a) 36, 120, 450
b) 42, 48, 66
c) 120, 168, 264
d) 250, 63, 225

6) Risolvere il seguente problema:

a) Lo spago di tre gomitoli deve essere tagliato in parti uguali e della maggiore lunghezza possibile. Calcolare la lunghezza di ciascuna parte e il numero delle parti, sapendo che i tre gomitoli sono lunghi 180 m, 240 m, 300 m.

7) Nelle seguenti uguaglianze sostituire al posto dei puntini un numero in modo che l'uguaglianza risulti verificata:

m.c.m.(8, …..) = 24;
m.c.m.(4, …..) = 12;
m.c.m.(…..,30) = 60;
m.c.m.(10, …..) = 110;
m.c.m.(3, 9, …..) = 90
m.c.m.(6,….., 15) = 30

8) Calcolare mentalmente il m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri:

a) 4, 6
b) 10, 12
c) 15, 20
d) 12, 16
e) 20, 30
f) 4, 5
g) 8, 12
h) 24, 40
i) 14, 21

9) Calcolare, mediante la scomposizione in fattori primi, il m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri:

c) 36, 56
d) 70, 75
e) 24, 60
d) 17, 19
e) 72, 30
f) 120, 96
g) 75, 36
h) 84, 90
i) 17, 11

10) Risolvere il seguente problema:

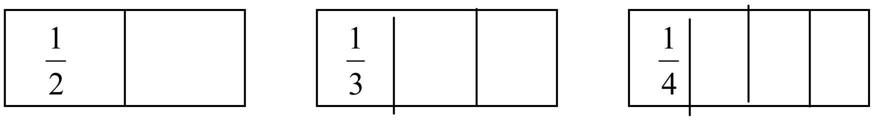
a) Tre fari si accendono ad intervalli regolari, il primo ogni 4 secondi, il secondo ogni 6 ed il terzo ogni 12 secondi. Se ad un certo istante si accendono contemporaneamente, dopo quanti secondi si accenderanno nuovamente insieme?

FRAZIONI

Se dividiamo una grandezza qualsiasi in due, tre, quattro, ecc. parti uguali, otteniamo rispettivamente un mezzo, un terzo, un quarto, ecc. della grandezza data. Un mezzo, un terzo, un quarto, ecc. si chiamano <u>unità frazionarie</u> e si indicano rispettivamente con i simboli:

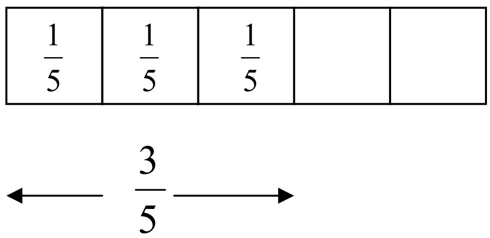
$$\mathbf{\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \ldots}$$

Nel disegno abbiamo rappresentato $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... di un rettangolo.

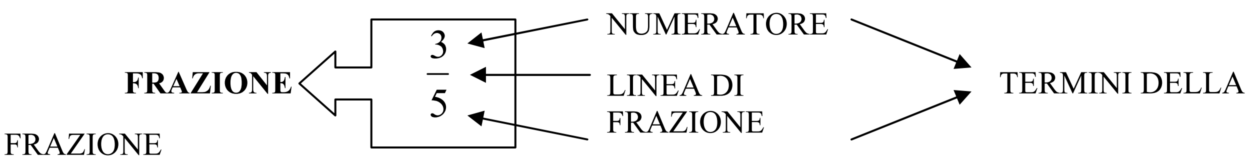


Si dice **unità frazionaria** il simbolo di una qualsiasi delle parti *uguali* in cui è stata divisa una grandezza che si considera come unità.

Consideriamo come unità un rettangolo e supponiamo di averlo diviso in 5 parti uguali e di considerarne 3.

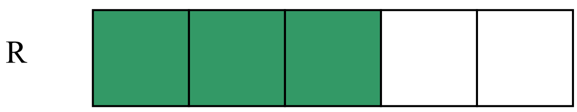


Abbiamo preso 3 unità frazionarie, ciascuna delle quali è $\frac{1}{5}$ dell'unità; abbiamo cioè preso tre quinti dell'unità. I tre quinti si indicano con il simbolo $\frac{3}{5}$, che si dice frazione.



LA FRAZIONE COME OPERATORE

La frazione si presenta quindi come operatore su grandezze. Per indicare $\frac{3}{5}$ di una grandezza G, si scrive $\frac{3}{5}$G; ad esempio per indicare $\frac{3}{5}$ del rettangolo R, si scrive $\frac{3}{5}$R.



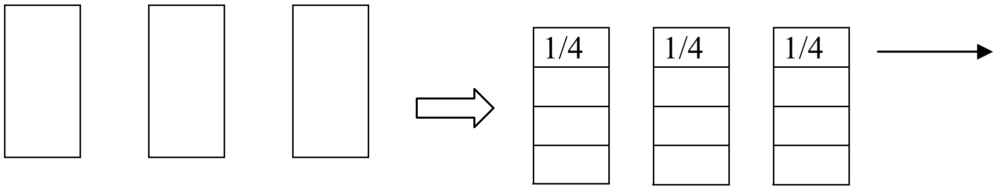
$$\longleftarrow \; \frac{3}{5}\mathbf{R} \; \longrightarrow$$

Il simbolo $\frac{3}{5}$ applicato alla grandezza considerata indica il risultato di due successive operazioni sulla grandezza stessa:

a) dividere la grandezza in cinque parti uguali e
b) prendere tre di quelle parti

LA FRAZIONE COME QUOZIENTE FRA NUMERI NATURALI

Supponiamo di dover dividere tre tavolette uguali di cioccolato fra quattro bambini.



$\frac{3}{4}$ per ogni bambino

La frazione $\frac{3}{4}$ si può considerare come il quoziente della divisione fra 3 e 4.

La linea di frazione può, quindi, sostituire il segno di divisione.

FRAZIONI EQUIVALENTI E CLASSI DI EQUIVALENZA

Definizione di CLASSE DI EQUIVALENZA

L'insieme di tutte le frazioni equivalenti ad una data frazione si dice classe di equivalenza. Ogni classe di equivalenza è individuata da una qualsiasi frazione della classe stessa.

$$Classe\,\frac{1}{2}=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8},\ldots,\frac{15}{30},\ldots\frac{n}{2n}\right\}$$

$$Classe\,\frac{2}{3}=\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\ldots,\frac{2n}{3n}\right\}$$

$$Classe\,\frac{3}{1}=\left\{\frac{3}{1},\frac{6}{2},\ldots,\frac{3n}{n}\right\}$$

PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI

Moltiplicando o dividendo i termini di una frazione per uno stesso numero diverso da zero, otteniamo una frazione equivalente a quella data.

FRAZIONI DECIMALI

Se le frazioni hanno denominatore 10 o potenze di 10 ($10^0, 10^1, 10^2, ..., 10^n$) si chiamano frazioni decimali.

Sono frazioni decimali $\frac{1}{10}; \frac{7}{100}; \frac{839}{1000}; \frac{317}{10}; ...$ e si possono anche scrivere nel seguente modo: 0,1; 0,07; 0,839; 31,7; …

Tali scritture si chiamano **numeri decimali**.

Trasformazione di frazioni in numeri decimali	**Trasformazione di numeri decimali in frazioni**
$\frac{3}{20} = 0{,}15$ infatti 3:20=0,15	$2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$
$\frac{87}{40} = 2{,}175$ infatti 87:40=2,175	$0{,}031 = \frac{31}{1000}$
$\frac{107}{25} = 4{,}28$ infatti 107:25=4,28	$1{,}\overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$
$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ infatti 1:3=0,333333333…	$5{,}1\overline{7} = \frac{517-51}{90} = \frac{466}{90} = \frac{233}{45}$

CONFRONTO TRA FRAZIONI

Cosa significa confrontare due frazioni?

Confrontare due frazioni significa stabilire se esse sono o no equivalenti; se non lo sono stabilire quale è la maggiore.

Esercizi

1) Confrontare le frazioni di ciascuna delle seguenti coppie ponendo tra esse il segno > o < oppure =

$\frac{5}{3}\ldots\ldots\frac{4}{7}$; $\frac{7}{8}\ldots\ldots\frac{5}{8}$; $\frac{8}{4}\ldots\ldots\frac{99}{100}$; $\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{5}{9}$; $\frac{1}{2}\ldots\ldots\frac{1}{7}$

$\frac{11}{15}\ldots\ldots\frac{11}{17}$; $\frac{1}{3}\ldots\ldots\frac{1}{5}$; $\frac{12}{3}\ldots\ldots\frac{9}{10}$; $\frac{5}{3}\ldots\ldots\frac{7}{3}$; $\frac{1}{2}\ldots\ldots\frac{33}{66}$

2) Indicare se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa e giustificare la risposta:

a) Il numero **4** è minore di $\frac{11}{2}$ e maggiore di $\frac{13}{2}$ *V* *F*

b) Il numero 7 è compreso tra $\frac{20}{3}$ e $\frac{22}{3}$ *V* *F*

3) Dario ha mangiato $\frac{1}{3}$ di torta e Franco $\frac{2}{5}$. Chi ne ha mangiata di più?

4) Tradurre ciascuna delle seguenti frasi in espressione aritmetica e calcolarne il valore:

a) Sottrarre dal quadrato di $\frac{2}{5}$ il cubo di $\frac{1}{2}$.

b) Addizionare al quoziente fra $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ il quadrato di $\frac{1}{5}$.

c) Elevare al cubo la somma di $\frac{1}{2}$ e di $\frac{1}{3}$ e moltiplicare il risultato ottenuto per $\frac{12}{5}$.

d) Sottrarre dal quadrato della somma di $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ la differenza tra **1** e $\frac{1}{5}$.

OPERAZIONI IN Q

Addizione e sottrazione tra due o più frazioni **1)** si trasformano eventualmente le frazioni in altre equivalenti aventi lo stesso denominatore **2)** si scrive un'unica frazione con denominatore il denominatore delle frazioni e per numeratore la somma o la differenza	$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-\frac{7}{4}=\frac{3+5-7}{4}=\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{15}=\frac{45}{60}+\frac{50}{60}-\frac{28}{60}=\frac{45+50-28}{60}=\frac{67}{60}$ **infatti il m.c.m. fra 4,6,15 è 60**
Moltiplicazione tra frazioni **1)** si semplificano, se possibile, i numeratori di ogni frazione con i denominatori **2)** si scrive un'unica frazione avente come numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori	$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{11}=\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 11}=\frac{105}{88}$ $\frac{10}{21}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{27}{8}=\frac{10:5:2}{21:7:3}\cdot\frac{14:7:2}{15:5:3}\cdot\frac{27:3:3}{8:2:2}=$
Divisione tra frazioni **1)** si moltiplica la prima per la reciproca della seconda $\left(\textbf{la reciproca di } \frac{a}{b} \textbf{ è } \frac{b}{a}\right)$ **2)** si esegue la moltiplicazione	$\frac{5}{12}:\frac{35}{24}=\frac{5}{12}\cdot\frac{24}{35}=\frac{5:5}{12:12}\cdot\frac{24:12}{35:5}=\frac{2}{7}$
Elevamento a potenza di una frazione Si elevano a potenza il numeratore e il denominatore della frazione	$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}$

N.B. ORDINE DI ESECUZIONE DELLE OPERAZIONI IN UNA ESPRESSIONE

<u>IN ASSENZA DI PARENTESI</u> si eseguono prima la moltiplicazione e la divisione nell'ordine in cui si susseguono, poi l'addizione e la sottrazione.

<u>SE INVECE FIGURANO ANCHE PARENTESI</u>, si procede prima al calcolo del valore delle espressioni contenute nelle parentesi più interne; dopo si procede con le espressioni successive fino alla totale eliminazione di tutte le parentesi.

Calcolare le seguenti espressioni:

$\left(\frac{3}{4}\right)^{50}:\left(\frac{3}{4}\right)^{49}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{100}:\left(\frac{2}{5}\right)^{98}$; $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{3}$; $\left(\frac{11}{13}\right)^{101}:\left(\frac{11}{13}\right)^{99}$; $\left(\frac{133}{100}\right)^{10}:\left(\frac{133}{100}\right)^{9}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$; $\left(\frac{3}{10}\right)^{123}:\left(\frac{3}{10}\right)^{121}$; $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{17}:\left(\frac{3}{2}\right)^{14}$; $\left(\frac{11}{12}\right)^{20}:\left(\frac{11}{12}\right)^{18}$

Risolvere le seguenti espressioni (nella colonna a fianco trovi i risultati)

$\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot\left\{\left(\frac{11}{7}+3\right)\cdot\left[\left(1-\frac{2}{3}\right):\left(4-\frac{19}{6}\right)\right]^2\right\}$	$\frac{8}{7}$
$\frac{1}{6}-\left\{\left[\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(2-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}+4\right)\right]\right\}:\frac{2}{3}$	$\frac{7}{60}$
$\dfrac{\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)}$	$\frac{8}{9}$
$\left[\dfrac{\left(\frac{1}{3}+1\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)+\left(2-\frac{1}{4}\right)}{2-\frac{15}{11}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)}\right]:\frac{51}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\dfrac{\left[\frac{7}{2}:3\cdot\frac{3}{14}+\left(\frac{7}{2}:2\right)\cdot\left(\frac{2}{7}:3\right)\right]^2:\frac{5}{12}}{\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{15}\cdot\frac{10}{8}\right)^2:\left(\frac{2}{3}\right)^3}$	$\frac{5}{8}$
$\left\{\left[\frac{17}{12}:\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{3}\right)\right]:\left(\frac{13}{12}+\frac{1}{3}\right)\right\}^2\left[\left(\frac{13}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{13}{12}\right)\right]^0:\left(\frac{10}{7}\right)^2$	$\frac{36}{25}$
$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot 5+\left(\frac{1}{2}\right)^4:\left(\frac{1}{2}\right)^4+2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2-11:\frac{22}{5}\right]^2+\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{9}{5}\right)^2$	$\frac{1}{40}$
$\left\{\left[\left(\frac{12}{35}\right)^3:\left(\frac{18}{7}\right)^3\right]^4\cdot\left(3-\frac{1}{2}\right)^{12}\right\}:\left(2-\frac{5}{3}\right)^{10}+\left[\left(\frac{1}{9}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]:\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$\frac{10}{9}$

Un racconto per te …

Un giorno il numero quattro si stancò di essere pari. I numeri dispari, pensava, sono più allegri e spiritosi. E si stancò di quella sua forma un po' insipida a sediolina. Guarda il sette, si diceva, com'è svelto ed elegante e il tre com'è tondo e arguto, io invece sono tutto pieno di angoli e privo di personalità. E si stancò di essere due più due che tutti lo sanno e anzi quando vogliono dire una cosa che sanno tutti dicono: "quanto fa due più due?". Sognava di essere un numero lungo e difficile, di quelli che te li dimentichi sempre e se li vuoi sommare devi prendere carta e matita. Oppure raro e importante come un numero perfetto i cui divisori (tranne esso stesso) addizionati danno esattamente come somma il numero in questione (divisori di 6 sono 1, 2, 3 e 6=1+2+3).

Certo era un bel problema perché non è che il quattro volesse diventare un altro numero, che so io? il 5 o il 18965743, cioè lungo e difficile. E sembra proprio che il quattro non possa essere dispari e non possa essere lungo e difficile, oppure non sarebbe il quattro. Sarebbe un'altra cosa, e lui non voleva essere un'altra cosa: voleva essere lui soltanto un po' diverso.

Un problema così il quattro non sapeva risolverlo. Forse non aveva neanche una soluzione. Se ce l'aveva, però, il Grande Matematico doveva saperla. Così il quattro andò dal Grande Matematico e gli espose il suo caso. Il Grande Matematico sorrise. Anche lui una volta avrebbe voluto essere diverso: non un altro, ovviamente, perché voleva rimanere se stesso, ma un po' più simile al Grande Ballerino, o al Grande Tennista, o al Grande Centravanti. Anche lui quindi aveva avuto il problema del quattro e sapeva come affrontarlo. Lo fece accomodare per terra (una sedia sarebbe proprio stata inutile!) e cominciò a parlargli.

"Vedi quattro" gli disse "non c'è bisogno di diventare diverso, di essere dispari per esempio, oppure lungo e difficile. Non c'è bisogno perché tu sei già diverso, anche se non te ne rendi conto. A te sembra di essere una stupida sediolina che fa due più due e tutti lo sanno, e invece ci sono in te cose molto speciali: per esempio, tu sei due più due ma anche due per due, e anche (qui andiamo sul difficile) due alla seconda. E questo è un fatto del tutto straordinario: tre più tre non è tre per tre e certo non è tre alla terza. Oppure prendi quest'altra: quattro per quattro sommato a tre per tre fa cinque per cinque, il che vuol dire che tre, quattro e cinque sono una famiglia di numeri pitagorici consecutivi, e di famiglie così non ce ne sono altre. Il sette che tu ammiri tanto, non ne ha una. Oppure fai parte di quella famiglia di numeri quasi perfetti perché la somma dei tuoi divisori ti è inferiore di una sola unità (divisori di quattro sono 1 e 2, 1+2=3). Ma a questo punto il quattro era un po' confuso e pregò il Grande Matematico di smettere. Quella faccenda dei numeri pitagorici e dei numeri perfetti non la capiva proprio e voleva pensarci su, perché gli sembrava importante. Se ne andò, e da allora è sempre lì che conta. Ha capito i numeri pitagorici e molte altre cose ancora, e ogni giorno scopre di essere diverso.

Rispondere alle seguenti domande.

1. Quale titolo daresti al racconto?
2. Qual è la caratteristica di un numero primo?
3. Quando un numero si dice perfetto?
4. Può un numero primo essere un numero perfetto?
5. Il numero 28 è un numero perfetto? E il numero 32? Perché?
6. Calcola due alla terza sommato tre alla terza. Traduci la seguente frase in una espressione matematica.
7. I numeri 5, 12 e 13 formano una terna pitagorica? Perché? E i numeri 1, 2 e 3?
8. I numeri 64 e 81 sono numeri quasi perfetti? Perché?